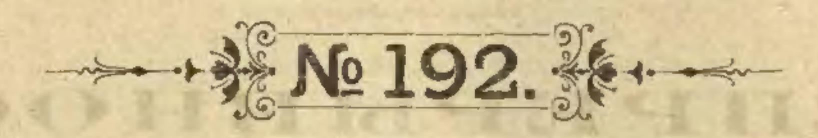
XVI Сем. 15-го іюня 1894 г. № 12.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



Отъ редакціи.

При настоящемъ послѣднемъ номерѣ XVI семестра разсылается тѣмъ изъ подписчиковъ „Вѣстника Оп. Физики“, которые состоятъ таковыми съ начала его изданія, „Систематическій Указатель“, по отдѣламъ всего, что было помѣщено въ первыхъ пятнадцати семестрахъ нашего журнала, т. е. съ 20 Августа 1886 г. по 1-е Января текущаго 1894 года. „Указатель“ этотъ мы сочли необходимымъ издать отдѣльной брошюрой для удобства нашихъ постоянныхъ читателей, сохраняющихъ комплектъ №№ „Вѣстника“ за истекшіе годы, въ виду значительнаго количества накопившагося матеріала, затрудняющаго справки по семестровымъ оглавленіямъ. Въ него не вошли статьи, замѣтки и задачи, печатавшіяся въ теченіе 1884—85 и 1885—86 уч. гг. въ „Журналѣ Элементарной Математики“, такъ какъ всѣмъ бывшимъ подписчикамъ этого журнала редакція наша разослала уже (при № 49 „В. О. Ф.“) достаточно полный именной указатель всего, что было помѣщено въ 36-и №№ названнаго журнала и въ первыхъ четырехъ семестрахъ „Вѣстника“.

Во избѣжаніе лишнихъ расходовъ, мы не сочли нужнымъ разсылать „Систематическій Указатель“ подписчикамъ, не имѣющимъ всего комплекта №№ „Вѣстника“, для коихъ онъ не имѣетъ существеннаго значенія. Тѣмъ не менѣе, лица, желающія запастись такимъ „Указателемъ“ для справокъ, могутъ пріобрѣсть его въ нашемъ книжномъ складѣ за 50 коп. съ пересылкою.

При настоящемъ № разсылается также *всѣмъ* подписчикамъ семестровая обложка для 12-и номеровъ, вышедшихъ въ истекшемъ по-

лугодіи. Заявленія о недополученныхъ или утерянныхъ №№ XVI-го семестра просимъ сообщить не позже 1-го Сентября 1894 года.

Полный комплектъ 12-и №№ за послѣдній XVI-ый семестръ имѣется въ складѣ въ весьма ограниченномъ числѣ экземпляровъ.

№ 1-ый этого семестра (по общему счету № 181) исчерпанъ и отдѣльно не продается.

Слѣдующій № 193-ій (XVII-го сем. № 1-ый) выйдетъ 20 Августа.

Редакторъ-Издатель *Эр. Шпачинскій.*

НЕПРЕРЫВНОСТЬ

и

ирраціональныя числа.

R. Dedekind'a.

(Съ нѣмецкаго языка перевелъ *С. Шатуновскій*).

(*Окончаніе* *).

§ 3.

Непрерывность прямой линіи.

Но теперь фактомъ величайшей важности является то обстоятельство, что на прямой L есть безконечно много точекъ, которыя не соотвѣтствуютъ никакому раціональному числу. Дѣйствительно, если точка p соотвѣтствуетъ раціональному числу a, то, какъ извѣстно, длина op соизмѣрима съ употребленной при построеніи единицей длины, т. е. существуетъ третья длина, такъ называемая общая мѣра, относительно которой обѣ длины представляютъ цѣлыя кратныя. Но уже древніе греки знали и доказали, что существуютъ длины, несоизмѣримыя съ данной единицей длины, напр., діагональ квадрата, сторона котораго есть единица длины. Если нанести такую длину отъ точки o на прямую, то получимъ конечную точку, которой не соотвѣтствуетъ никакое раціональное число. Такъ какъ легко далѣе показать, что существуетъ безконечное множество длинъ, несоизмѣримыхъ съ единицей длины, то можемъ утверждать: прямая L безконечно болѣе богата индивидуумами-точками, чѣмъ область R раціональныхъ чиселъ индивидуумами-числами.

Если же хотятъ, а это въ самомъ дѣлѣ желательно, изслѣдовать всѣ явленія на прямой также и ариѳметическимъ путемъ, то, въ виду недостаточности для этой цѣли раціональныхъ чиселъ, становится необходимымъ существенно улучшить построенный путемъ созиданія раціональныхъ чиселъ инструментъ R, создавъ новыя числа такимъ образомъ, чтобы область чиселъ пріобрѣла ту же полноту, или, скажемъ прямо, ту же *непрерывность*, какъ и прямая линія.

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" № 191.

Приведенныя до сихъ поръ соображенія всѣмъ такъ хорошо извѣстны, что многіе сочтутъ ихъ повтореніе совершенно излишнимъ. Однако же я нахожу ихъ краткое обозрѣніе необходимымъ для того, чтобы надлежащимъ образомъ подготовить главный вопросъ. Принятое до сихъ поръ введеніе ирраціональныхъ чиселъ связывается именно съ понятіемъ о протяженныхъ величинахъ — которое само нигдѣ до сихъ поръ не опредѣлено—и опредѣляетъ число, какъ результатъ измѣренія такой величины другою того же рода *). Вмѣсто этого я требую, чтобы ариѳметика развивалась сама изъ себя. Можно въ общемъ согласиться съ тѣмъ, что такія связи съ неариѳметическими представленіями дали ближайшій поводъ къ расширенію понятія о числѣ (хотя это рѣшительно не имѣло мѣста при введеніи комплексныхъ чиселъ); но это безусловно не можетъ служить достаточнымъ основаніемъ для того, чтобы ввести въ ариѳметику, науку о числахъ, эти чуждыя ей соображенія. Какъ отрицательныя и дробныя раціональныя числа созданы путемъ свободнаго творчества и какъ вычисленія съ этими числами должны были и могли быть сведены къ законамъ вычисленій съ положительными цѣлыми числами, точно такъ же должно стремиться къ тому, чтобы ирраціональныя числа были вполнѣ опредѣлены черезъ посредство раціональныхъ чиселъ. Но какъ это сдѣлать? — вотъ въ чемъ вопросъ.

Предыдущее сравненіе области R раціональныхъ чиселъ съ прямою привело къ открытію въ первой изъяновъ (Lückenhaftigkeit), неполноты или разрывности, между тѣмъ какъ прямой мы приписываемъ полноту, отсутствіе пробѣловъ или непрерывность. Въ чемъ же собственно состоитъ эта непрерывность? Все и заключается въ отвѣтѣ на этотъ вопросъ, и только въ этомъ отвѣтѣ мы пріобрѣтемъ научное основаніе для изслѣдованія *всѣхъ* непрерывныхъ областей. Смутными разговорами о непрерывной связи малѣйшихъ частицъ конечно ничего не достигнешь. Дѣло идетъ о томъ, чтобы дать точный признакъ непрерывности, который могъ бы служить базисомъ дѣйствительныхъ дедукцій. Долгое время я напрасно объ этомъ думалъ, но наконецъ нашелъ искомое. Разныя лица вѣроятно оцѣнятъ эту находку различно, но все же я думаю, что большинство найдетъ ея содержаніе весьма тривіальнымъ. Она состоитъ въ слѣдующемъ: въ предыдущихъ параграфахъ обращено было вниманіе на то, что каждая точка p прямой производитъ разложеніе прямой на двѣ части такимъ образомъ, что каждая точка одной части расположена влѣво отъ каждой точки другой. Я усматриваю теперь сущность непрерывности въ обратномъ принципѣ, т. е. въ слѣдующемъ:

„Если всѣ точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка перваго класса лежитъ влѣво отъ каждой точки второго класса, то существуетъ одна и только одна точка, которая производитъ это раздѣленіе прямой на два класса, это разсѣченіе прямой на два куска"**).

---

*) Кажущееся преимущество общности такого опредѣленія числа исчезаетъ тотчасъ же, какъ только подумаешь о комплексныхъ числахъ. Наоборотъ, по моему воззрѣнію, понятіе отношенія двухъ однородныхъ величинъ тогда только можетъ быть ясно развито, когда ирраціональныя числа уже введены.

**) Т. е., если, слѣдуя какому бы то ни было закону (признаку), напр., подчиняясь условіямъ нѣкоторой задачи, мы производимъ раздѣленіе точекъ прямой на два класса

Какъ уже и сказано было, я, кажется, не ошибаюсь, принявъ, что каждый тотчасъ же согласится съ истинностью этого утвержденія; большинство моихъ читателей будутъ даже очень разочарованы, узнавъ, что посредствомъ этой тривіальности долженъ быть снятъ покровъ съ тайны непрерывности. Относительно этого я замѣчу слѣдующее: мнѣ очень пріятно, если каждый находитъ упомянутый принципъ столь яснымъ и въ такой мѣрѣ согласнымъ со своимъ представленіемъ о прямой линіи; ибо я рѣшительно не въ состояніи привести какое бы то ни было доказательство справедливости этого принципа, и никто не въ состояніи этого сдѣлать. Принятіе этого свойства прямой линіи есть не что иное, какъ аксіома, посредствомъ которой мы только и признаемъ за линіей ея непрерывность, мысленно вкладываемъ (hineindenken) непрерывность въ прямую. Если вообще пространство имѣетъ реальное бытіе, то ему *нѣтъ* необходимости быть непрерывнымъ. Безчисленныя его свойства оставались бы тѣми же, если бы оно было разрывнымъ. И если бы мы знали навѣрно, что пространство не обладаетъ непрерывностью, то, при желаніи, намъ все таки ничто не могло бы помѣшать сдѣлать его непрерывнымъ черезъ мысленное заполненіе его пробѣловъ. Это заполненіе должно было бы состоять въ созданіи новыхъ точекъ и осуществлялось бы сообразно упомянутому принципу.

§ 4.

Созиданіе ирраціональныхъ чиселъ.

Послѣдними словами уже достаточно ясно указывается, какимъ образомъ разрывная область R раціональныхъ чиселъ должна быть дополнена до превращенія ея въ непрерывную. Какъ это поставлено было на видъ въ § 1 (III), каждое раціональное число a производитъ разложеніе системы R на два класса A_1 и A_2 такого рода, что каждое число a_1 перваго класса меньше каждаго числа a_2 втораго класса A_2; число a представляетъ либо наибольшее число класса A_1, либо наименьшее число класса A_2. Если теперь дано какое либо подраздѣленіе системы R на два класса A_1, A_2, обладающее только тѣмъ характернымъ свойст-

---

такимъ образомъ, что 1. каждая точка прямой принадлежитъ либо къ тому, либо къ другому классу, и 2. каждая точка одного класса расположена влѣво отъ каждой точки другого класса, то существуетъ одна и только одна точка такого свойства, что каждая точка, влѣво отъ нея лежащая, принадлежитъ къ одному классу, а всѣ остальныя точки прямой принадлежатъ къ другому классу. Если бы мы разорвали прямую, т. е. удалили бы изъ нея отрѣзокъ AB, то оставшійся геометрическій образъ („разорванная“ прямая) былъ бы разбитъ на два куска P и Q, лежащіе съ различныхъ сторонъ изъяна такимъ образомъ, что 1) каждая точка разсматриваемаго образа принадлежала бы либо къ классу P, либо къ классу Q и 2) если кусокъ P, содержащій точку A, лежитъ влѣво отъ изъяна, то каждая точка класса P лежитъ влѣво отъ каждой точки класса Q. Такимъ образомъ каждая точка, лежащая влѣво отъ точки A, принадлежитъ къ классу P, а всѣ остальныя точки—къ классу Q. Точка B обладаетъ тѣмъ же свойствомъ: всѣ точки нашего образа, лежащія влѣво отъ B, принадлежитъ къ классу P; остальныя точки—къ классу Q. Существованіемъ не одной, а двухъ точекъ такого свойства какъ A и B характеризуется разрывность нашего образа. Невозможностью существованія двухъ такихъ точекъ и постояннымъ существованіемъ одной только точки такого рода опредѣляется непрерывность прямой.

(*Примѣч. переводчика*).

вомъ, что каждое число a_1 въ A_1 меньше каждаго числа a_2 въ A_2, то для краткости мы будемъ называть такое подраздѣленіе *сѣченіемъ* и будемъ его означать черезъ (A_1, A_2). Мы можемъ тогда сказать, что каждое число a производитъ одно или собственно два сѣченія, на которыя мы однако не будемъ смотрѣть какъ на существенно различныя*); это сѣченіе имѣетъ *кромѣ того* то свойство, что либо между числами перваго класса есть наибольшее, либо между числами втораго класса существуетъ наименьшее. И наоборотъ, если сѣченіе обладаетъ и этимъ свойствомъ, то оно производится этимъ наибольшимъ или наименьшимъ числомъ.

Легко однако убѣдиться въ томъ, что существуетъ безчисленное множество сѣченій, которыя не могутъ быть произведены раціональнымъ числомъ. Ближайшій примѣръ есть слѣдующій.

Пусть D будетъ положительное цѣлое число, но не квадратъ цѣлаго числа. Существуетъ положительное цѣлое число λ такого рода, что

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2.$$

Если возьмемъ для второго класса A_2 каждое положительное раціональное число, котораго квадратъ $> D$, а для перваго класса A_1 всѣ остальныя раціональныя числа, то это подраздѣленіе составляетъ сѣченіе (A_1, A_2), то есть каждое число a_1 меньше каждаго числа a_2. Именно, если $a_1 = 0$ или отрицательно, то уже въ силу этого a_1 меньше каждаго числа a_2, ибо по опредѣленію это послѣднее представляетъ собой положительное число. Если же a_1 есть число положительное, то его квадратъ $\leq D$ и, слѣдовательно, a_1 меньше каждаго числа a_2, котораго квадратъ $> D$.

Это сѣченіе не производится однако никакимъ раціональнымъ числомъ. Чтобы доказать это, должно прежде всего обнаружить, что нѣтъ никакого раціональнаго числа, котораго квадратъ равенъ D. Хотя это и извѣстно изъ первыхъ элементовъ теоріи чиселъ, но мы все же находимъ возможнымъ удѣлить мѣсто слѣдующему косвенному доказательству. Если есть раціональное число, котораго квадратъ $= D$, то существуютъ и два положительныхъ цѣлыхъ числа t и u, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$t^2 - D u^2 = 0,$$

и можно принять, что u есть *наименьшее* положительное цѣлое число, обладающее тѣмъ свойствомъ, что его квадратъ черезъ умноженіе на D обращается въ квадратъ нѣкотораго цѣлаго числа t. Такъ какъ очевидно

$$\lambda u < t < (\lambda + 1) u,$$

то число

$$u_1 = t - \lambda u$$

*) Число a можетъ быть отнесено къ первому или ко второму классу. То и другое подраздѣленіе R на два класса разсматривается какъ два случая одного и того же сѣченія. Въ первомъ случаѣ, когда число a отнесено къ первому классу, оно есть наибольшее число въ первомъ классѣ, и нельзя указать наименьшаго числа во второмъ классѣ; во второмъ случаѣ нѣтъ наибольшаго числа въ первомъ классѣ, но a есть наименьшее число во второмъ классѣ.

(*Примѣч. переводчика*).

есть положительное цѣлое число и притомъ меньшее u. Если далѣе положить

$$t_1 = \mathrm{D}u - \lambda t,$$

то и t_1 будетъ положительное цѣлое число, причемъ получаемъ

$$t_1^2 - \mathrm{D}u_1^2 = (\lambda^2 - \mathrm{D})(t^2 - \mathrm{D}u^2) = 0,$$

что противорѣчитъ допущенію, сдѣланному относительно u.

Такимъ образомъ квадратъ всякаго цѣлаго числа a или $< \mathrm{D}$, или $> \mathrm{D}$. Отсюда легко выводится, что въ классѣ A_1 нѣтъ наибольшаго, а въ классѣ A_2 нѣтъ наименьшаго числа. Дѣйствительно, если положить

$$y = \frac{x(x^2 + 3\mathrm{D})}{3x^2 + \mathrm{D}},$$

то

$$y - x = \frac{2x(\mathrm{D} - x^2)}{3x^2 + \mathrm{D}}$$

и

$$y^2 - \mathrm{D} = \frac{(x^2 - \mathrm{D})^3}{(3x^2 + \mathrm{D})^2}.$$

Если взять здѣсь для x положительное число изъ класса A_1, то $x^2 < \mathrm{D}$, слѣдовательно, $y > x$ и $y^2 < \mathrm{D}$, поэтому y также принадлежитъ къ классу A_1. Если же положить x числомъ изъ класса A_2, то $y < x$; $x > 0$ и $y^2 > \mathrm{D}$, такъ что и y принадлежитъ къ классу A_2. Это сѣченіе не производится поэтому никакимъ раціональнымъ числомъ.

Въ томъ свойствѣ, что не всѣ сѣченія производятся раціональными числами, и состоитъ неполнота или разрывность области R раціональныхъ чиселъ.

Теперь всякій разъ, когда передъ нами сѣченіе $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$, которое не можетъ быть произведено никакимъ раціональнымъ числомъ, мы *создаемъ* новое *ирраціональное* число α, которое разсматривается нами какъ вполнѣ опредѣленное этимъ сѣченіемъ $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$. Мы скажемъ, что число α соотвѣтствуетъ этому сѣченію, или что оно производитъ это сѣченіе. Такимъ образомъ отнынѣ каждому опредѣленному сѣченію соотвѣтствуетъ одно и только одно раціональное или ирраціональное число, и мы будемъ смотрѣть на два числа какъ на *различныя* или *неравныя* тогда и только тогда, когда они соотвѣтствуютъ существенно различнымъ сѣченіямъ.

Чтобы найти основаніе для распредѣленія всѣхъ *реальныхъ*, т. е. всѣхъ раціональныхъ и ирраціональныхъ чиселъ намъ необходимо прежде всего изслѣдовать соотношенія между двумя какими либо сѣченіями $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$ и $(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2)$, производимыми какими угодно двумя числами α и β. Всякое сѣченіе $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$ очевидно дано вполнѣ уже въ томъ случаѣ, когда мы знаемъ одинъ изъ двухъ классовъ, наприм. первый классъ A_1, потому что второй A_2 состоитъ изъ всѣхъ раціональныхъ чиселъ, не заключающихся въ классѣ A_1; характерною же особенностью этого перваго класса является то, что, заключая въ себѣ

какое либо число a_1, онъ содержитъ и всѣ числа, меньшія a_1. Если теперь сравнимъ два первыхъ класса этого рода A_1 и B_1, то можетъ случиться 1), что они вполнѣ тождественны, т. е. каждое число, содержащееся въ A_1, содержится также и въ B_1 и каждое число, содержащееся въ B_1, содержится и въ A_1. Въ этомъ случаѣ A_2 необходимо тождественно съ B_2; оба сѣченія вполнѣ тождественны, что мы знаками выражаемъ черезъ $\alpha=\beta$ или $\beta=\alpha$.

Но если два класса A_1 и B_1 не тождественны, то въ одномъ, напр., въ A_1 есть число $a'_1=b'_2$, не содержащееся въ классѣ B_1 и заключающееся, слѣдовательно, въ B_2; поэтому всѣ числа b_1, заключающіяся въ B_1, несомнѣнно будутъ меньше, чѣмъ это число $a'_1=b'_2$; слѣдовательно, всѣ числа b_1 заключаются и въ A_1.

Если теперь 2) это число a'_1 будетъ единственное число въ A_1, не входящее въ B_1, то всякое другое число a_1, содержащееся въ A_1, будетъ содержаться и въ B_1, а потому a_1 меньше a'_1, т. е. a'_1 есть наибольшее между числами a_1, поэтому сѣченіе (A_1, A_2) производится раціональнымъ числомъ $\alpha=a'_1=b'_2$. О второмъ сѣченіи (B_1, B_2) мы уже знаемъ, что всѣ числа b_1 класса B_1 содержатся и въ A_1, а потому они меньше, чѣмъ число $a'_1=b'_2$, которое содержится въ B_2; всякое же другое число b_2, содержащееся въ B_2, должно быть больше, чѣмъ b'_2, потому что иначе b_2 было бы также меньше, чѣмъ a'_1 и заключалось бы въ A_1, а слѣдовательно и въ B_1. Такимъ образомъ b'_2 есть наименьшее между числами, содержащимися въ B_2; слѣдовательно, и сѣченіе (B_1, B_2) производится тѣмъ же раціональнымъ числомъ $\beta=b'_2=a'_1=\alpha$. Оба сѣченія поэтому несущественно различны.

Но если 3) въ A_1 есть по крайней мѣрѣ два различныхъ раціональныхъ числа $a'_1=b'_2$ и $a''_1=b''_2$, не содержащихся въ B_1, то ихъ существуетъ и безконечное множество, потому что все безконечное множество чиселъ, лежащихъ между a'_1 и a''_1 (§ 1, II), содержится очевидно въ A_1, но не въ B_1. Два числа α и β, соотвѣтствующія въ этомъ случаѣ существенно различнымъ сѣченіямъ (A_1, A_2) и (B_1, B_2), мы также называемъ *различными*, а именно скажемъ, что α *больше*, чѣмъ β, что β *меньше*, чѣмъ α, и выразимъ это въ знакахъ какъ черезъ $\alpha>\beta$, такъ и черезъ $\beta<\alpha$. Здѣсь слѣдуетъ поставить на видъ, что это опредѣленіе вполнѣ совпадаетъ съ прежнимъ, когда оба числа α и β раціональны.

Остаются еще слѣдующіе возможные случаи: если 4) въ B_1 содержится одно и только одно число $b'_1=a'_2$, не содержащееся въ A_1, то оба сѣченія (A_1, A_2) и (B_1, B_2) только несущественно различны и производятся однимъ и тѣмъ же числомъ $\alpha=a'_2=b'_1=\beta$. Если же 5) въ B_1 есть по крайней мѣрѣ два различныхъ числа, не содержащихся въ A_1, то $\beta>\alpha$, $\alpha<\beta$.

Такъ какъ этимъ исчерпываюся всѣ случаи, то выводимъ, что изъ двухъ различныхъ чиселъ одно необходимо большее, другое меньшее; въ этомъ заключаются два возможныхъ случая. Третій случай невозможенъ. Это заключалось уже въ употребленіи *сравнительной степени* (больше, меньше) для выраженія отношенія между α и β; но только теперь выборъ такого выраженія вполнѣ оправданъ. Именно при изысканіяхъ такого рода необходимо самымъ заботливымъ образомъ остерегаться, чтобы, даже при всемъ желаніи быть честнымъ, не увлечься и не сдѣ-

лать непозволительныхъ перенесеній изъ одной области въ другую, изъ за поспѣшнаго выбора выраженій, относящихся къ другимъ, уже развитымъ представленіямъ.

Если снова точно обсудимъ случай $\alpha > \beta$, то найдемъ, что меньшее число β въ томъ случаѣ, когда оно раціонально, навѣрное принадлежитъ къ классу A_1. Дѣйствительно, такъ какъ въ A_1 есть число $a'_1 = b'_2$, принадлежащее классу B_2, то независимо отъ того, будетъ ли β наибольшимъ числомъ въ B_1 или наименьшимъ въ B_2, навѣрное имѣемъ $\beta \leq a'_1$, и, слѣдовательно, β содержится въ A_1. Точно также изъ $\alpha > \beta$ выводится, что большее число α, когда оно раціонально, навѣрное содержится въ B_2, ибо $\alpha \geq a'_1$. Соединяя оба соображенія, найдемъ слѣдующій результатъ: если сѣченіе (A_1, A_2) производится числомъ α, то всякое раціональное число принадлежитъ къ классу A_1 или классу A_2, смотря по тому, будетъ ли оно меньше или больше α. Если само число α раціональное, то оно можетъ принадлежать къ тому или къ другому классу.

Отсюда, наконецъ, вытекаетъ еще и слѣдующее: если $\alpha > \beta$; если, значитъ, существуетъ безчисленное множество чиселъ въ A_1, не содержащихся въ B_1, то существуетъ среди нихъ также безконечное множество такихъ чиселъ, которыя одновременно отличны и отъ α и отъ β. Каждое такое раціональное число $c < \alpha$, ибо оно содержится въ A_1, и въ то же время оно $> \beta$, потому что содержится въ B_2.

§ 5.

Непрерывность области реальныхъ чиселъ.

Сообразно съ твердо установленными нами родами различія чиселъ, система $\mathfrak{R}$ всѣхъ реальныхъ чиселъ образуетъ правильно распредѣленную область одного измѣренія. Этимъ сказано только то, что нижеслѣдующіе законы имѣютъ мѣсто.

I. Если $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$, то и $\alpha > \gamma$. Мы будемъ говорить, что β лежитъ между числами α и γ.

II. Если α, γ два различныхъ числа, то всегда существуетъ безконечное множество различныхъ чиселъ, лежащихъ между числами α и γ.

III. Если α есть опредѣленное число, то всѣ числа системы $\mathfrak{R}$ распадаются на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, изъ коихъ каждый содержитъ безконечно много индивидуумовъ. Первый классъ $\mathfrak{A}_1$ обнимаетъ собою всѣ тѣ числа α_1, которыя $< \alpha$; второй классъ $\mathfrak{A}_2$, обнимаетъ всѣ тѣ числа α_2, которыя $> \alpha$. Само число α можетъ быть отнесено по произволу къ первому или ко второму классу и тогда оно соотвѣтственно бываетъ наибольшимъ числомъ въ первомъ или наименьшимъ во второмъ классѣ. Въ каждомъ случаѣ разложеніе системы $\mathfrak{R}$ на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ таково, что каждое число перваго класса меньше каждаго числа второго класса $\mathfrak{A}_2$, и мы говоримъ, что это разложеніе произведено числомъ α.

Чтобы быть краткимъ и не утомлять читателя, я опускаю доказательства этихъ положеній, вытекающія непосредственно изъ опредѣленій предыдущихъ параграфовъ.

Кромѣ этихъ свойствъ, область $\mathfrak{R}$ обладаетъ еще *непрерывностью*, т. е. имѣетъ мѣсто слѣдующее положеніе:

IV. Если система $\mathfrak{R}$ всѣхъ реальныхъ чиселъ распадается на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ такого рода, что каждое число α_1 класса $\mathfrak{A}_1$ меньше каждаго числа α_2 класса $\mathfrak{A}_2$, то существуетъ одно и только одно число α, посредствомъ котораго это разложеніе производится.

Доказательство. Вмѣстѣ съ разложеніемъ или сѣченіемъ $\mathfrak{R}$ на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ дается и нѣкоторое сѣченіе (A_1, A_2) системы R всѣхъ раціональныхъ чиселъ, опредѣленое тѣмъ правиломъ, что A_1 содержитъ всѣ раціональныя числа класса $\mathfrak{A}_1$, а A_2—всѣ остальныя раціональныя числа, т. е. всѣ раціональныя числа класса $\mathfrak{A}_2$. Пусть α будетъ то вполнѣ опредѣленное число, которое производитъ это сѣченіе (A_1, A_2). Если теперь β есть какое либо число, отличное отъ α, то существуетъ безконечно много раціональныхъ чиселъ c, которыя лежатъ между α и β. Если $\beta<\alpha$, то $c<\alpha$; поэтому c принадлежитъ къ классу A_1, а, слѣдовательно, и къ кассу $\mathfrak{A}_1$, но такъ какъ вмѣстѣ съ этимъ $\beta<c$, то и β принадлежитъ къ тому же классу $\mathfrak{A}_1$, ибо каждое число въ $\mathfrak{A}_2$ больше каждаго числа c въ $\mathfrak{A}_1$. Если же $\beta>\alpha$, то $c>\alpha$; поэтому c принадлежитъ къ классу A_2, а, слѣдовательно, и къ классу $\mathfrak{A}_2$, но такъ какъ вмѣстѣ съ этимъ $\beta>c$, то и β принадлежитъ къ классу $\mathfrak{A}_2$, потому что каждое число въ $\mathfrak{A}_1$ меньше каждаго числа c въ $\mathfrak{A}_2$. Такимъ образомъ каждое число β, отличное отъ α, принадлежитъ или къ классу $\mathfrak{A}_1$, или къ классу $\mathfrak{A}_2$, смотря по тому, будетъ ли $\beta<\alpha$, или $\beta>\alpha$; слѣдовательно, само α представляетъ либо наибольшее число въ $\mathfrak{A}_1$, либо наименьшее въ $\mathfrak{A}_2$, т. е. α есть нѣкоторое, и, очевидно, единственное число, посредствомъ котораго производится разложеніе $\mathfrak{R}$ на классы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Что требовалось доказать.

§ 6.

Вычисленія съ реальными числами.

Для того, чтобы вычисленіе съ двумя реальными числами α и β свести къ вычисленію съ раціональными числами, нужно только по двумъ сѣченіямъ (A_1, A_2) и (B_1, B_2), производимымъ числами α и β въ системѣ R, опредѣлить сѣченіе (C_1, C_2), соотвѣтствующее результату γ вычисленія*). Мы ограничимся здѣсь приведеніемъ простѣйшаго примѣра, сложенія.

---

*) Авторъ очевидно хотѣлъ сказать слѣдующее: дѣйствія (+), (—), (×) и (:) опредѣлены были до сихъ поръ только для раціональныхъ чиселъ; для ирраціональныхъ же чиселъ эти дѣйствія не будутъ имѣть смысла до тѣхъ поръ, пока мы не условимся относительно того, какой именно смыслъ мы *желаемъ* имъ придавать въ примѣненіи къ ирраціональнымъ числамъ. Такъ, напримѣръ, сумму двухъ ирраціональныхъ чиселъ нельзя опредѣлить ни какъ совокупность, въ которой содержится столько единицъ и аликвотныхъ частей единицы, сколько ихъ въ двухъ слагаемыхъ, вмѣстѣ взятыхъ, ни идуктивно, какъ это дѣлаетъ Грассманъ для цѣлыхъ чиселъ, ибо ни то, ни другое опредѣленіе не имѣетъ здѣсь смысла. Мы могли бы и совсѣмъ не употреблять термина „сумма“ въ примѣненіи къ ирраціональнымъ числамъ, говоря, что ирраціональныя числа не имѣютъ суммы, но дѣлать такое или подобное ему ограниченіе было бы въ высшей степени неудобно; съ другой стороны, сообразуясь съ выгодами соблюденія въ одной и той же области знанія такъ называемаго правила пер-

Если c есть какое либо раціональное число, то мы отнесемъ его къ классу C_1, если существуетъ число a_1 въ A_1 и число b_1 въ β, такого рода, что $a+b \geqq c$. Всѣ другія числа c отнесемъ къ классу C_2. Это подраздѣленіе всѣхъ раціональныхъ чиселъ на два класса C_1 и C_2 очевидно образуетъ сѣченіе, ибо всякое число c_1 въ C_1 меньше каждаго числа c_2 въ C_2. Если теперь оба числа α, β раціональны, то каждое содержащееся въ C_1 число $c_1 \leqq \alpha + \beta$, ибо $a_1 \leqq \alpha$; $b_1 \leqq \beta$, а потому и $a_1 + b_1 \leqq \alpha + \beta$. Если бы далѣе въ C_2 содержалось какое либо число $c_2 < \alpha + \beta$, такъ что было бы $\alpha + \beta = c_2 + p$, гдѣ p означаетъ положительное число, то имѣли бы

$$c_2 = (\alpha - \frac{1}{2} p) + (\beta - \frac{1}{2} p),$$

а это находится въ противорѣчіи съ опредѣленіемъ числа c_2, такъ какъ $\alpha - \frac{1}{2} p$ есть число изъ A_1, а $\beta - \frac{1}{2} p$ есть число изъ B_1. Такимъ образомъ каждое содержащееся въ C_2 число $c_2 \geqq \alpha + \beta$; слѣдовательно, сѣченіе (C_1, C_2) образуется въ этомъ случаѣ суммой $\alpha + \beta$. Мы поэтому не погрѣшимъ противъ опредѣленія, которое имѣетъ мѣсто въ ариѳметикѣ раціональныхъ чиселъ, если во всѣхъ случаяхъ будемъ разумѣть подъ *суммой* $\alpha + \beta$ двухъ произвольныхъ дѣйствительныхъ чиселъ α, β то число γ, посредствомъ котораго образуется сѣченіе (C_1, C_2). *) Далѣе, если только одно изъ двухъ чиселъ α, β, напр. α, раціонально, то легко убѣдиться, что на сумму $\gamma = \alpha + \beta$ не вліяетъ то обстоятельство, отнесемъ ли мы α къ первому классу A_1 или ко второму A_2.

Такъ же, какъ сложеніе, можно опредѣлить и остальныя операціи такъ называемой элементарной ариѳметики, а именно составленіе разности, произведенія, степени, корня, логариѳма. Такимъ образомъ можно придти къ дѣйствительному доказательству теоремъ (какъ напр. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$), которыя, сколько я знаю, до сихъ поръ нигдѣ не доказаны. Слишкомъ большія подробности, которыхъ слѣдуетъ опасаться

манентности въ опредѣленіи термина (по этому правилу всякое измѣненіе въ соозначеніи термина должно совершаться такъ, чтобы новое соозначеніе по возможности не только не противорѣчило прежнему, но заключало бы послѣднее какъ частный случай) будетъ наиболѣе цѣлесообразнымъ опредѣлить термины основныхъ дѣйствій надъ реальными числами такъ, чтобы въ своемъ новомъ соозначеніи эти термины могли быть относимы какъ къ раціональнымъ, такъ и къ ирраціональнымъ числамъ и чтобы, примѣняя къ раціональнымъ числамъ дѣйствія на основаніи новаго ихъ опредѣленія, мы всегда получали прежніе результаты. Пусть γ будетъ результатъ совершенія нѣкотораго дѣйствія O надъ двумя произвольными раціональными числами α и β. Если найдемъ правило K, по которому, зная сѣченія, производимыя числами α и β, мы всегда въ состояніи найти сѣченіе, производимое числомъ γ, то дѣйствіе O можно будетъ опредѣлить какъ процессъ составленія нѣкотораго сѣченія по правилу K изъ сѣченій, производимыхъ числами α и β. Такое опредѣленіе дѣйствія O, имѣя смыслъ и въ томъ случаѣ, когда одно изъ чиселъ α и β или оба ирраціональны, обладаетъ свойствомъ перманентности. Процессъ отысканія новыхъ перманентныхъ опредѣленій дѣйствій при переходѣ отъ раціональныхъ чиселъ ко всѣмъ реальнымъ авторъ называетъ приведеніемъ вычисленій съ реальными числами къ вычисленіямъ съ раціональными числами. (*Примѣч. переводчика*).

*) Изъ сѣченій $(A_1 A_2)$ и $(B_1 B_2)$ по указанному только что способу.

(*Примѣч. переводчика*).

при определеніи болѣе сложныхъ операцій, лежатъ частью въ природѣ самого предмета, большею же частью онѣ могутъ быть устранены. Въ этомъ отношеніи является весьма полезнымъ понятіе объ *интервалѣ*, т. е. о системѣ A раціональныхъ чиселъ, обладающихъ слѣдующимъ характернымъ свойствомъ: если a и a' суть числа системы A, то всѣ раціональныя числа, лежащія между a и a' содержатся въ A. Система R раціональныхъ чиселъ, а также и оба класса каждаго ея сѣченія суть интервалы. Если существуетъ раціональное число a_1, которое меньше каждаго числа интервала A, и есть раціональное число a_2, которое больше каждаго числа интервала A, то A называется конечнымъ интерваломъ; въ этомъ случаѣ существуетъ очевидно безконечное множество чиселъ того же рода, что и a_1, и безконечное множество чиселъ такого же рода, какъ a_2. Вся область R распадается на три куска, A_1, A, A_2, причемъ появляются два вполнѣ опредѣленныхъ раціональныхъ или ирраціональныхъ числа α_1, α_2, которыя соотвѣтственно могутъ быть названы нижней и верхней (или меньшей и большей) *границей* интервала A. Нижняя граница α_1 опредѣляется сѣченіемъ, въ которомъ первый классъ образованъ системой A_1; верхняя же граница α_2 опредѣляется сѣченіемъ, въ которомъ A_2 образуетъ второй классъ. О всякомъ раціональномъ или ирраціональномъ числѣ α, лежащемъ между α_1 и α_2, будемъ говоритъ, что оно лежитъ *внутри* интервала A. Когда всѣ числа интервала A являются также числами интервала B, то A будетъ называться кускомъ B.

Еще большія отступленія будутъ повидиму предстоять, когда захотятъ перенести безчисленныя предложенія ариѳметики раціональныхъ чиселъ (напр. предложеніе $(a+b)c = ac + bc$) на произвольныя реальныя числа. Это однако не такъ: скоро убѣждаешься, что все здѣсь приводится къ доказательству положенія, по которому ариѳметическія операціи сами обладаютъ нѣкоторой непрерывностью. То, что я подъ этимъ понимаю, я облеку въ форму общей теоремы.

„Если число λ есть результатъ вычисленій, совершенныхъ съ числами α, β, γ,....., и если λ лежитъ внутри интервала L, то можно указать интервалы A, B, C (внутри которыхъ лежатъ числа α, β, γ,....) такого рода, что результатъ такого же вычисленія, въ которомъ однако числа α, β, γ,... замѣнены любыми числами интерваловъ A, B, C,...., будетъ всегда представлять число, лежащее внутри интервала L“. Однако же ужасная трудность, связанная со словеснымъ изложеніемъ такой теоремы, убѣждаетъ насъ въ томъ, что здѣсь необходимо что нибудь предпринять для того, чтобы придти въ помощь языку: этого мы дѣйствительно достигаемъ самымъ совершеннымъ образомъ, когда вводимъ понятіе *о перемѣнныхъ величинахъ, о функціяхъ, о предѣлахъ*. Всего цѣлесообразнѣе было бы основать на этихъ понятіяхъ опредѣленія даже простѣйшихъ ариѳметическихъ операцій, что здѣсь однако не можетъ быть дальше проведено.

§ 7.

Анализъ безконечныхъ.

Въ заключеніе мы уяснимъ здѣсь зависимость между приведенными до сихъ поръ соображеніями и основными положеніями анализа безконечныхъ.

Говорятъ, что перемѣнная величина x, пробѣгающая послѣдовательныя опредѣленныя численныя значенія, приближается къ постоянному *предѣлу* a, если она въ ходѣ процесса *окончательно**) заключается между каждыми двумя числами, между которыми a само лежитъ, или, что то же, если разность $x - a$, взятая абсолютно, окончательно опускается ниже всякаго даннаго значенія, отличнаго отъ нуля.

Одно изъ важнѣйшихъ предложеній гласитъ такъ: „Если величина a ростетъ постоянно, но не сверхъ всякихъ границъ, то она приближается къ нѣкоторому предѣлу".

Я доказываю это предложеніе слѣдующимъ образомъ: по предположенію, существуетъ одно, а, слѣдовательно, и безчисленное множество чиселъ a_2 такого рода, что x постоянно остается $< a_2$. Я обозначаю черезъ $\mathfrak{A}_2$ систему всѣхъ этихъ чиселъ a_2 и черезъ $\mathfrak{A}_1$ систему всѣхъ остальныхъ чиселъ a_1; каждое изъ послѣднихъ имѣетъ то свойство, что въ продолженіе процесса измѣненія имѣемъ окончательно $x \geqslant a_1$, поэтому каждое число a_1 меньше каждаго числа a_2, и, слѣдовательно, существуетъ число a, которое представляетъ собою или наибольшее въ $\mathfrak{A}_1$, или наименьшее въ $\mathfrak{A}_2$ (§ 5. IV). Перваго быть не можетъ, ибо x никогда не перестаетъ расти, поэтому a есть наименьшее число въ $\mathfrak{A}_2$. Какое бы число a_1 мы ни взяли, рано или поздно будетъ окончательно $a_1 < x < a$, т. е. x приближается къ предѣлу a.

Это предложеніе эквивалентно принципу непрерывности, т. е. оно теряетъ свою силу, какъ только мы станемъ смотрѣть хоть на одно реальное число, какъ на число, отсутствующее въ области $\mathfrak{R}$; или, выражаясь иначе, если это предложеніе вѣрно, то вѣрна и теорема IV въ § 5.

Другое предложеніе, также ему эквивалентное, но еще болѣе часто встрѣчающееся въ анализѣ безконечныхъ, гласитъ такъ: „Если въ процессѣ измѣненія величины x можно указать для каждой положительной величины δ соотвѣтствующій моментъ, начиная съ котораго x измѣняется меньше чѣмъ на δ, то x приближается къ нѣкоторому предѣлу".

Это обращеніе легко доказуемой теоремы, по которой перемѣнная величина, приближающаяся къ опредѣленному предѣлу, измѣняется въ концѣ концовъ меньше, чѣмъ на любую данную положительную величину, можетъ быть выведено какъ изъ предыдущаго предложенія, такъ и непосредственно изъ принципа непрерывности. Мы выберемъ послѣдній путь. Пусть δ будетъ произвольная положительная величина (т. е. $\delta > 0$); по предположенію, наступаетъ моментъ, съ котораго x начинаетъ измѣняться меньше, чѣмъ на δ, т. е., если въ этотъ моментъ x обладаетъ значеніемъ a, то впослѣдствіи всегда $x > a - \delta$ и $x < a + \delta$. Я оставляю на время первоначальную гипотезу и держусь только сейчасъ доказаннаго факта, что всѣ позднѣйшія значенія перемѣнной x лежатъ

*) Авторъ употребляетъ слово „definitiv"=„рѣшительно, окончательно" въ томъ смыслѣ, что, пріобрѣвъ какое либо свойство въ опредѣленный моментъ своего измѣненія, перемѣнная величина удерживаетъ это свойство, въ продолженіе всего остальнаго хода процесса. (*Примѣч. переводчика*).

между конечными значеніями, которыя могутъ быть даны. На этомъ я основываю двойное подраздѣленіе всѣхъ реальныхъ чиселъ. Къ системѣ $\mathfrak{A}_2$ я отношу всякое число α_2 (напр. $a+\delta$), обладающее тѣмъ свойствомъ, что въ ходѣ процесса x окончательно становится $\leqslant\alpha_2$; къ системѣ $\mathfrak{A}_1$ я отношу всякое число, не содержащееся въ $\mathfrak{A}_2$. Если α_1 есть такое число, то, какъ бы далеко процессъ ни продолжался, случай $x>\alpha_1$ будетъ еще наступать безчисленное множество разъ*). Такъ какъ каждое число α_1 меньше каждаго числа α_2**), то существуетъ вполнѣ опредѣленное число α, которымъ производится это сѣченіе $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ системы $\mathfrak{R}$ и которое я буду называть верхнимъ предѣломъ перемѣнной величины x, остающейся всегда конечною. Но характеромъ измѣненій перемѣнной x порождается также другое сѣченіе $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ системы $\mathfrak{R}$: число β_1 (напр. $a-\delta$) включается въ $\mathfrak{B}_1$, если въ продолженіе процесса окончательно $x\geqslant\beta_1$; всякое другое число β_2, подлежащее включенію въ $\mathfrak{B}$, имѣетъ то свойство, что x никогда окончательно не становится $\geq\beta_2$, такъ что случай $x<\beta_2$ будетъ наступать еще безчисленное множество разъ. Число β, производящее это сѣченіе, пусть называется нижнимъ предѣломъ перемѣнной x. Оба числа α, β очевидно характеризуются слѣдующимъ свойствомъ: если ε есть произвольно малая положительная величина, то всегда будетъ окончательно $x<\alpha+\varepsilon$ и $x>\beta-\varepsilon$, но никогда не будетъ окончательно $x<\alpha-\varepsilon$ и $x>\beta+\varepsilon$. Теперь возможны два случая. Если α и β отличны другъ отъ друга, то необходимо $\alpha>\beta$, ибо всегда $\alpha_2\geq\beta_1$; перемѣнная величина x колеблется и, какъ бы далеко процессъ ни пошелъ, она все еще перетерпѣваетъ измѣненія, значенія которыхъ превосходятъ $(\alpha-\beta)-2\varepsilon$, гдѣ ε означаетъ произвольно малую положительную величину. Первоначальная гипотеза, къ которой я теперь только возвращаюсь, находится въ противорѣчіи съ этимъ выводомъ; остается поэтому только второй случай $\alpha=\beta$, и, такъ какъ уже доказано, что, какъ-бы мала ни была положительная величина ε, окончательно будетъ всегда $x<\alpha+\varepsilon$ и $x>\beta-\varepsilon$, то x приближается къ предѣлу α, что и требовалось доказать.

Удовольствуемся этими примѣрами въ изложеніи связи между принципомъ непрерывности и анализомъ безконечныхъ.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Каникулярные курсы. Подъ такимъ заглавіемъ появилась на дняхъ замѣтка въ № 6137 „Новороссійскаго Телеграфа“, которую позволяемъ себѣ перепечатать безъ всякихъ измѣненій.

„Всякій мало-мальски знакомый съ нашей системой народнаго образованія знаетъ, что не только школы, но и педагоги наши дѣ-

---

*) Ибо противное означало бы, что неравенство $x\leqslant\alpha_1$ справедливо *окончательно*, т. е. α_1 принадлежало бы къ классу $\mathfrak{A}_2$. *(Прим. перев.)*.

**) Потому что послѣ того, какъ величина x *окончательно* стала $<\alpha_2$, она еще больше или еще сдѣлается больше, чѣмъ α_1. *(Прим. перев.)*.

лятся на три весьма рѣзко различныя категоріи: низшихъ, среднихъ и высшихъ. Переходъ изъ низшей школы въ среднюю и изъ средней въ высшую хотя и труденъ, но для учащихся все таки возможенъ; для учащихъ же онъ абсолютно немыслимъ. Гораздо легче въ наше время профессору попасть въ академики, нежели учителю гимназіи на университетскую каѳедру; точно также для этого послѣдняго во сто кратъ больше имѣется шансовъ сдѣлаться директоромъ или акцизнымъ чиновникомъ, нежели для сельскаго учителя получить званіе учителя гимназіи".

„Я не стану ни обсуждать такого неестественнаго положенія вещей, ни анализировать его причинъ: указываю только на общеизвѣстный фактъ и хочу разсказать объ одномъ отрадномъ педагогическомъ мѣропріятіи, практикуемомъ кое-гдѣ за границей, которое, однакожъ, наврядъ-ли намъ удалось бы примѣнить у себя дома при вышеуказанномъ отсутствіи всякой связи между тремя типами русскихъ учебныхъ заведеній и при существующихъ нынѣ пассажирскихъ тарифахъ".

„Въ Германіи, напримѣръ, учителя гимназій и реальныхъ училищъ не считаютъ для себя невозможнымъ и безполезнымъ заниматься наукой по своей спеціальности; они находятъ, очевидно, время не только обучать другихъ, но и учиться самимъ, потому что пишутъ и издаютъ не только учебники (какъ у насъ), но и чисто научные трактаты. Со своей стороны профессора, идя на встрѣчу такимъ стремленіямъ своихъ младшихъ коллегъ, изъ среды которыхъ они вышли сами, открываютъ частные спеціальные курсы, для облегченія всѣмъ желающимъ усвоенія новѣйшихъ научныхъ теорій и пріемовъ. Въ Іенскомъ, напримѣръ, университетѣ такіе курсы, обыкновенно двухнедѣльные, назначаемые въ концѣ лѣтнихъ каникулъ (съ 1-го по 16-ое августа), практикуются уже нѣсколько лѣтъ и, повидимому, посѣщаются весьма охотно пріѣзжими учителями. Для примѣра привожу распредѣленіе занятій, опубликованное въ журналахъ, на предстоящій каникулярный сезонъ: 1) микроскопъ (проф. Штраубе), 2) преподаваніе (Unterrichtslehre—проф. Рейнъ), 3) основныя понятія физики (время, масса, сила, работа, энергія, энтропія и пр.—проф. Ауэрбахъ), 4) строеніе и жизнь растеній (проф. Детмеръ), 5) физіологія растеній и техника опытовъ (онъ-же), 6) техника физическихъ опытовъ (проф. Шефферъ), 7) демонстрація новыхъ физическихъ опытовъ (диффракціонные спектры, электрическія волны, измѣренія прочности, электротехника, фотометрія и пр.—проф. Ауэрбахъ), 8) школьная гигіена (проф. Гертнеръ), 9) упражненія въ опредѣленіи времени и мѣста (проф. Кнопфъ). 10) электрическія и магнитныя измѣренія (проф. Штраубель), 11) новыя изслѣдованія въ области химіи (проф. Вольфъ), 12) физіологическая психологія (проф. Цигенъ), 13) техника зоотомическихъ работъ (проф. Ремеръ), 14) упражненія съ приборами спектральными и поляризаціонными (проф, Гэнге) и 15) обработка стекла (Гаакъ).—По каждому изъ переименованныхъ предметовъ читается отъ 10 до 12 лекцій въ теченіе двухъ недѣль; плата за каждый курсъ—15 марокъ".

„Программа безспорно интересная, хотя она обнимаетъ только область наукъ физическихъ и естественныхъ. Но для нихъ то и нужнѣе всего подобные курсы, въ виду ихъ тѣсной связи съ лабораторными занятіями".

„Вы спросите, быть можетъ, почему бы и у насъ нельзя было устроить при университетахъ подобныхъ каникулярныхъ курсовъ, которые оказали бы несомнѣнно громадную услугу, и пр. пр.? За отвѣтомъ на этотъ вопросъ «почему?»—обратитесь, прошу васъ, къ нашимъ профессорамъ и учителямъ гимназій и реальныхъ училищъ. Они лучше, чѣмъ могъ бы это сдѣлать я, докажутъ вамъ, какъ $2 \times 2 = 4$, что если все это и хорошо у нѣмцевъ, то у насъ въ Россіи—это рѣшительно немыслимо, что у нихъ нѣтъ на-то ни денегъ ни времени, что каникулы нужны для абсолютнаго отдыха, а не для какихъ то курсовъ, что двери нашихъ университетовъ такъ хитро устроены, что разъ онѣ уже захлопнулись за тѣмъ, кто вышелъ, вторично ихъ уже не отопрешь никакимъ ключемъ, что льготные тарифы существуютъ только для учащихся, а не для преподавателей, и пр. и пр. Вмѣстѣ съ тѣмъ они за одно уже докажутъ вамъ и невозможность такихъ лѣтнихъ курсовъ, которые читались бы при гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ для учителей городскихъ, уѣздныхъ и низшихъ училищъ. И я увѣренъ, что въ результатѣ вы прійдете къ тому же заключенію, къ какому я пришелъ уже давно, а именно, что въ педагогическихъ нашихъ сферахъ всякое полезное мѣропріятіе можетъ возникнуть не иначе, какъ посредствомъ циркулярнаго распоряженія". (*Діамагнитовъ*).

Затронутый авторомъ вопросъ о каникулярныхъ курсахъ, къ осуществленію коихъ у насъ онъ относится такъ скептически, дѣйствительно имѣетъ очень важное значеніе, вслѣдствіе чего мы къ нему еще вернемся. Нельзя не согласиться, что при отсутствіи всякихъ связей между жизнью нашихъ университетовъ и среднихъ учебныхъ заведеній, преподаватели этихъ послѣднихъ быстро отстаютъ отъ современнаго уровня своей спеціальности. Это въ особенности справедливо для физики, которая въ послѣдніе годы стала развиваться столь быстро и разносторонне. Поэтому, уже ради интересовъ того большинства учащихся въ гимназіяхъ нашихъ, которое не поступитъ на физико-математическіе факультеты и останется такимъ образомъ на всю жизнь съ тѣми свѣдѣніями, какія могли дать учителя физики, этимъ послѣднимъ необходимо оказать помощь въ усвоеніи новѣйшихъ воззрѣній и пріемовъ, будь то учрежденіемъ соотвѣтсвенныхъ періодическихъ курсовъ, или какимъ либо инымъ способомъ. Намъ кажется, напримѣръ, что подобные спеціальные курсы для преподавателей можно было съ наибольшей пользой и удобствомъ организовать во время періодическихъ нашихъ съѣздовъ естествоиспытателей и врачей.—Подробнѣе объ этомъ проектѣ побесѣдуемъ въ одномъ изъ слѣдующихъ номеровъ „Вѣстника".

Ш.

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ И БРОШЮРЫ.

Нѣсколько замѣчаній по поводу „Изслѣдованій по математической физикѣ" кн. Б. Голицына. Проф. *Н. Н. Шиллера.* Кіевъ. 1894.

Прямолинейная тригонометрія. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній съ собраніемъ задачъ. Составилъ *А. Воиновъ*, преподаватель харьковской 3-ей гимназіи. Харьковъ. 1894. Цѣна 70 коп.

О нѣкоторыхъ новѣйшихъ взглядахъ на методы рѣшенія вопросовъ физики. По поводу статьи П. А. Некрасова: „Термодинамика и электричество" и „Мнѣнія Ординарнаго Профессора Павла Некрасова о диссертаціи кн. Б. Голицына". Проф. *Н. Н. Шиллера.* Кіевъ. 1894.

Praca gazów w pompach gazowych powietrznych i kompresorach przez *Aleksandra Kuczynskiego* Jnżyniera. Warszawa. 1894.

Электрическій трамвай въ Кіевѣ. *В. В. Игнатовичъ-Завилейскаго.* Публичная лекція, прочитанная 29 марта 1894 года въ рядѣ лекцій Физико-математическаго Общества при университетѣ св. Владиміра на основаніе фонда имени Н. И. Лобачевскаго. Кіевъ. 1894. Ц. 1 р. 20 к.

Programme de l'enseignement et des conditions d'admission á l'Ecole Spéciale d'Architecture. Paris, 136, boulevard Montparnasse. Paris. 1894.

ЗАДАЧИ НА ИСПЫТАНІЯХЪ ЗРѢЛОСТИ ВЪ 18⁹²/₉₃ Г.

Одесскій Учебный Округъ.

Елисаветградская гимназія.

По алгебрѣ.—Требуется узнать, какія числа, кратныя 9, будучи раздѣлены на 21-й членъ ариѳметической прогрессіи, даютъ въ остаткѣ девятый членъ той же прогрессіи, если извѣстно, что въ прогрессіи 33 члена положительныхъ; произведеніе крайнихъ членовъ $=80$, а разность прогрессіи есть корень уравненія

$$1/x+4=\sqrt{16+\sqrt{\frac{64}{x^2}+\frac{9}{x^4}}}.$$

По геометріи.—Уголъ при вершинѣ прямого конуса $d=68^0 40' 24''$, а радіусъ основанія R=4 дюйм.; вершину конуса приняли за центръ шара и выбрали радіусъ шара такой длины, что поверхностью шара конусъ раздѣляется на двѣ равновеликія части; опредѣлить радіусъ шара.

Керченская гимназія.

По алгебрѣ.—Найти, на какое число нужно раздѣлить сумму 5 членовъ ариѳметической прогрессіи, у которой третій членъ равенъ $\sqrt[3]{42875}$, а пятый членъ равенъ корню квадратному изъ числа 3025, чтобы въ частномъ получилось число, меньшее дѣлителя семью единицами, а остатокъ послѣ дѣленія былъ бы равенъ половинѣ частнаго.

По геометріи.—Косоугольный треугольникъ ABC, котораго сторона AB=7,8 метр., AC=13,5 метр. и $\angle$ A, заключенный между этими сторонами, равенъ $75^0 18' 20''$, вращается около третьей стороны BC. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла, полученнаго отъ этого вращенія.

Кишиневская 1-я гимназія.

По алгебрѣ.—Найти сумму 10 членовъ ариѳметической прогрессіи, зная, что сумма произведеній перваго числа на 7, а разности ея на 5 равна 55.

По геометріи.—Около шара радіуса равнаго 2 метрамъ описанъ усѣченный конусъ. Вычислить объемъ этого конуса и сравнить его съ объемомъ шара (найти отношеніе его объема къ объему шара, вокругъ коего онъ описанъ), если уголъ между высотой и образующей конуса $=26^0 34'$.

Кишиневская 2-я гимназія.

По алгебрѣ.—Нѣкто разсчиталъ, что если онъ изъ своего капитала, приносящаго $6^0/_0$ сложныхъ, будетъ брать въ концѣ каждаго года по 3000 р., то черезъ 10 лѣтъ весь капиталъ будетъ израсходованъ. Во сколько лѣтъ капиталъ будетъ израсходованъ, если ежегодно расходовать по 1925 руб.?

По геометріи.—Опредѣлить радіусъ шара, описаннаго около треугольной пирамиды, въ которой стороны основанія равны a, b и c, а боковыя ребра наклонены къ плоскости основанія подъ $\angle \alpha$, полагая $a=13$, $b=14$, $c=15$ и $\alpha=24^0 17' 50''$.

ЗАДАЧИ.

№ 68. Данъ треугольникъ ABC, стороны котораго $AB=c$, $BC=a$ и $AC=b$. Двѣ стороны другого треугольника соотвѣтственно равны сторонамъ AB и AC и уголъ между ними$=2\angle BAC$. Опредѣлить безъ помощи тригонометріи третью сторону этого треугольника.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 69. Въ кругъ радіуса R вписанъ четыреугольникъ $ABCD$, діагонали котораго пересѣкаются въ точкѣ S. Діаметръ, проходящій черезъ точку S, наклоненъ къ діагоналямъ подъ углами, сумма которыхъ равна 90^0. Показать, что

$$\overline{AS}^2+\overline{BS}^2+\overline{CS}^2+\overline{DS}^2=4R^2.$$

Л. Заржецкій (Спб.).

№ 70. Найти цѣлыя значенія A и B, при которыхъ уравненія

$$x^2+Ax+B=0,\ x^2+Ax-B=0$$

имѣютъ одновременно раціональные корни.

(Заимств.) *Д. Е.* (Ив.-Вознес.).

№ 71. Около шара радіуса r описанъ кубъ. Проведены 12 плоскостей, параллельныхъ ребрамъ куба и касательныхъ къ шару въ пересѣченіи его съ діагональными плоскостями куба. Опредѣлить объемъ получающагося при этомъ восемнадцатигранника.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 72. Показать, что углы четыреугольника могутъ составить ариѳметическую прогрессію только въ двухъ случаяхъ: 1) если четыреугольникъ есть трапеція; 2) если около четыреугольника можно описать кругъ.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 73. Черезъ вершину A треугольника ABC проведена прямая, параллельная сторонѣ BC и на ней отъ точки A отложенъ отрѣзокъ AD, равный суммѣ сторонъ BA и CA. Точки D и B соединены прямой, пересѣкающей сторону AC въ точкѣ E. Показать, что центръ вписаннаго или внѣ вписаннаго въ треугольникъ ABC круга лежитъ на прямой, проведенной черезъ точку E параллельно BC.

С. Ш. (Одесса).

№ 74 *). *Задача по практической геометріи.*—Опустить изъ неприступной точки на данную прямую перпендикуляръ.

Н. С. (Тифлисъ).

№ 75 *). *Задача по практической геометріи.*—Опустить изъ данной точки на неприступную прямую перпендикуляръ.

Н. С. (Тифлисъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 334 (2 сер.). Опредѣлить произведеніе pq, гдѣ

$$p=(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\ldots..$$
$$q=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots..$$

Пусть

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)(1+x^7)\ldots=m,$$
$$(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\ldots=n,$$
$$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)(1+x^8)\ldots=m_1.$$

Тогда

$$pm=(1-x^2)(1-x^6)(1-x^{10})(1-x^{14})\ldots.$$
$$nm_1=(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{12})(1-x^{16})\ldots.$$
$$pm.nm_1=(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\ldots=n,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$pm.nm_1=n, \text{ т. е. } pm.m_1=1 \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Но

$$mm_1=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots=q,$$

что вмѣстѣ съ равенствомъ (α) даетъ

$$pq=1,$$

если, понятно, n и p не равны нулю, а m и m_1 конечны.

NB. Ни одного удовлетворительнаго рѣшенія. Напечатанное рѣшеніе принадлежитъ автору задачи, *М. Фридману*.

№ 581 (2 сер.). Рѣшить уравненіе

$$2\mathrm{sn}^2x+2\cos 2x-\sqrt{2}\cos x-2\cos x+\sqrt{2}=0.$$

Такъ какъ $\cos 2x=\cos^2x-\mathrm{sn}^2x$, то

$$2\mathrm{sn}^2x+2\cos^2x-2\mathrm{sn}^2x-(\sqrt{2}+2)\cos x+\sqrt{2}=0,$$

или

$$2\cos^2x-(\sqrt{2}+2)\cos x+\sqrt{2}=0$$
$$\cos^2x-{}^1/_2(2+\sqrt{2})\cos x+{}^1/_2\sqrt{2}=0,$$

откуда

*) При рѣшеніи этихъ задачъ можно пользоваться только цѣпью и кольями.

$$\cos x = {}^1/_4 \{(2+\sqrt{2})\pm(2-\sqrt{2})\}$$

$$\cos x_1 = 1,\ x_1 = 2\pi n;$$

$$\cos x_2 = {}^1/_2 \sqrt{2},\ x_2 = 2\pi n \pm {}^{\pi}/_2.$$

Я. Тепляковъ (Радомысль); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *Г. Легошинъ* (с. Знаменка); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Д.); *В. Абрамовичъ* (Сѣдлецъ); *К.* и *Ѳ.* (Тамбовъ); *И. Пановъ* (Симбирскъ); *Н. Кузнецовъ, А. Треумовъ, В. Баскаковъ*, (Ив.-Вознес.); *В. Ушаковъ* (ст. Усть-Медвѣдицкая); *П. Ивановъ* (Одесса); *К. Щиголевъ, В. Власовъ* (Курскъ); *С. Бабанская* (Тифлисъ).

№ 543 (1 сер.). Опредѣлить коэффиціэнты: a, b, c, d такъ, чтобы многочленъ

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

для всѣхъ значеній x, заключающихся между двумя данными предѣлами: $-h$ и $+h$, наименьше уклонялся отъ нуля, т. е., чтобы наибольшая абсолютная величина этого многочлена была возможно малою. (См. задачу 1-ой сер. № 60).

Положимъ, что наибольшее отклоненіе многочлена

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

отъ нуля въ предѣлахъ отъ $x=-h$ до $x=+h$ имѣетъ мѣсто при $x=\alpha$, въ такомъ случаѣ два выраженія

$$\alpha^4+b\alpha^2+d \text{ и } a\alpha^3+c\alpha \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

должны имѣть одинаковые знаки. Въ самомъ дѣлѣ, если бы эти выраженія имѣли разные знаки, то выраженія

$$\alpha^4+b\alpha^2+d \text{ и } -(a\alpha^3+c\alpha)$$

имѣли бы знаки одинаковые, и многочленъ (1) для $x=-\alpha$ пріобрѣталъ бы значеніе

$$\alpha^4-a\alpha^3+b\alpha^2-c\alpha+d$$

или

$$(\alpha^4+b\alpha^2+d)-(a\alpha^3+c\alpha),$$

по абсолютной величинѣ большее наибольшаго своего значенія

$$\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d$$

или

$$(\alpha^4+b\alpha^2+d)+(a\alpha^3+c\alpha), \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

что невозможно.

Но если выраженія (2) имѣютъ одинаковые знаки, то выраженіе (3) т. е. наибольшее отклоненіе многочлена (1) отъ нуля будетъ тогда имѣть возможно малую абсолютную величину, когда

$$a=0 \text{ и } c=0,$$

ибо если бы a и c были отличны отъ нуля, то полагая $a=0$ и $c=0$ и въ то же время давая для b и d такія значенія, чтобы ни α ни $\alpha^4+b\alpha^2+d$ не измѣнились по величинѣ, мы *уменьшили бы возможно малое значеніе* наибольшаго отклоненія многочлена (1) отъ нуля, что невозможно.

Итакъ, чтобы многочленъ (1) наименѣе уклонялся отъ нуля въ предѣлахъ отъ $x=-h$ до $x=+h$, необходимо, чтобы

$$a=0 \text{ и } c=0:$$

слѣдовательно, многочленъ (1) долженъ имѣть такой видъ

$$x^4+bx^2+d, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

и остается опредѣлить только b и d.

Полагая $x^2=y$, многочленъ (4) можно представить въ такомъ видѣ

$$y^2+by+d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Когда x измѣняется отъ $-h$ до 0 и затѣмъ отъ 0 до $+h$, y измѣняется отъ h^2 до 0 и отъ 0 до h^2; слѣдовательно, когда x получаетъ всевозможныя значенія отъ $-h$ до $+h$, y получаетъ всевозможныя значенія отъ 0 до h^2, и многочленъ (4) будетъ наименѣе уклоняться отъ нуля въ предѣлахъ отъ $x=-h$ до $x=+h$ при тѣхъ же значеніяхъ коэффиціэнтовъ b и d, при какихъ многочленъ (5) будетъ наименѣе уклоняться отъ нуля въ предѣлахъ отъ $y=0$ до $y=h^2$.

Но изъ рѣшенія задачи № 60*) слѣдуетъ, что многочленъ (5) будетъ наименѣе уклоняться отъ нуля въ предѣлахъ отъ $y=0$ до $y=h^2$ при

$$b=-h^2 \text{ и } d=\frac{h^4}{8},$$

слѣдовательно искомыя значенія коэффиціэнтовъ будутъ

$$a=0,\ b=-h^2,\ c=0 \text{ и } d=\frac{h^4}{8},$$

и изъ всѣхъ многочленовъ вида

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

только многочленъ

$$x^4-h^2x^2+\frac{h^4}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

будетъ наименѣе уклоняться отъ нуля въ предѣлахъ отъ $x=-h$ до $x=+h$.

Такъ какъ въ предѣлахъ отъ $x=-h$ до $x=+h$ будетъ $x^2\leqslant h^2$, а слѣдовательно, $x^2-h^2\leqslant 0$, то очевидно, что $x^4-h^2x^2\leqslant 0$ и

$$x^4-h^2x^2+\frac{h^4}{8}\leqslant\frac{h^4}{8}.$$

Слѣдовательно, величина $\frac{h^4}{8}$ и представляетъ наибольшее отклоненіе отъ нуля многочлена (6) и это отклоненіе соотвѣтствуетъ предѣльнымъ значеніямъ для x т. е. $x=-h$ и $x=+h$.

NB. На эту задачу рѣшеній не было получено. Напечатанное рѣшеніе принадлежитъ автору задачи, *С. Гирману*.

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *Я. Полушкина* (с. Знаменка) № 534 (1 сер.) и 582 (2 сер.); *А. П.* (Ломжа) №№ 1, 6, 27, 28, 37 (3 сер.) и 581 (2 сер.); *П. Свѣшникова* (Троицкъ) № 475 (1 сер.).

ОСТАЛИСЬ НЕРѢШЕННЫМИ изъ предложенныхъ въ XIII, XIV и XV семестрахъ задачи: 394, 402, 425, 426, 439, 444, 453, 490, 511, 533, 545, 548, 554, 556, 577, 578.

ОТЪ РЕДАКЦІИ.—Редакція „Вѣстника Оп. Физики“ проситъ своихъ сотрудниковъ и читателей сообщить ей, по примѣру прошлыхъ лѣтъ, задачи, служившія темами на окончательныхъ испытаніяхъ, для помѣщенія ихъ въ „Вѣстникѣ“.

Конецъ XVI-го семестра.

*) См. № 20 „Вѣстника“.

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 2-го Іюля 1894 г.
„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ РУССКИХЪ ИЗДАНІЙ

Мининъ, В. П. Сборникъ геометрическихъ задачъ, примѣненный къ курсамъ гимназій, реальныхъ училищъ и другихъ среднихъ учебныхъ заведеній. Задачи алгебраической геометріи. Матеріалы для практическихъ упражненій учениковъ въ теченіе учебнаго года и темы для письменныхъ испытаній. Съ приложеніемъ большого числа задачъ, рѣшаемыхъ совмѣстнымъ примѣненіемъ геометріи и тригонометріи. Изд. 5-е, значительно дополненное, книжн. магазина В. Думнова. Москва. 1894. Ц. 90 к.

Штейнфельдъ, Павелъ, горн. инж. О единствѣ причины всѣхъ явленій природы. Гипотеза. Екатеринбургъ. 1893.

Ярошенко, С. П. Нѣкоторыя теоремы изъ теоріи опредѣлителей. (Записки Имп. Новороссійскаго университета т. LXI). Одесса. 1894.

Предтеченскій, Е. Звѣздный міръ. Общедоступное изложеніе главнѣйшихъ свѣдѣній по звѣздной астрономіи. Съ рисунками въ текстѣ. Изд. Ф. Павленкова. Спб. 1894. Ц. 30 к.

Протоколы засѣданій отдѣленія химіи Р. Ф. Химическаго общества при Имп. с.-петербургскомъ университетѣ. Подъ ред. Д. П. Коновалова. № 1. Спб.

Свенторжецкій, Л. Вліяніе ёмкости и самоиндукціи на работу машинъ перемѣннаго тока. (Отд. оттискъ изъ „Инж. Журнала" 1894 г.). Спб. 1894.

Столѣтовъ, А. Г. О критическомъ состояніи тѣлъ. Спб. 1894.

Татариновъ, инж. О поверхностяхъ взаимно-ортогональныхъ и образуемыхъ ими кривыхъ. Москва. 1894.

Яковкинъ, А., прив.-доц. моск. унив. По поводу „Гидратной теоріи растворовъ проф. Ф. М. Флавицкаго". Москва. 1894.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ ФРАНЦУЗСКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Химія.

Encyclopédie chimique, publiée sous la direction de M. Frémy, de l'Jnstitut. T. 4. Analyse chimiqne, Analyse qualitative microchimique, par M. Th. H. Behrens. Avec la collaboration de M. Léon Bourgeois. Jn—8⁰, VII+169 p. avec fig. Paris. V-e Dunod. 1894. fr. 6,25.

Gaube, J. Chimie minérale des corps organisés. Sel animal. Jn—8⁰, 19 p. Paris. Asselin et Houzeau.

Huguet, R. Traité de chimie médicale et pharmaceutique. „Chimie minerale". Jn—8⁰, XV+1014 p. av. fig. Paris. Baudry et C-e.

Causse, H. E. Action des aldéhydes sur les phénols polyvalents; Acétals aromatiques (thèse). Jn—4⁰. 30 p. Paris. Gauthier-Villars et fils.

Deuxième supplément au Dictionnaire de chimie pure et appliquée d'Ad. Wurtz, publié sous la direction de Ch. Friedel. Avec la collaboration de MM. P. Adam, A. Béhal, G. de Bechi, A. Bigot, L. Bourgeois, L. Boueault etc., etc. Fascicule 18. Jn—8⁰ à 2 col. p. 1361—1440. Paris. Hachette et. C-e fr. 2,00.

Garçon, J. La pratique du teinturier. T. 1—er: les méthodes et les essais de teinture; le succès en teinture. Jn—8⁰. XII+148 p. avec fig. Paris. Gauthier-Villars et fils. fr. 3,50.

Joly, A. Cours élémentaire de chimie (notation atomique), à l'usage des candidats aux baccalauréats classique et moderne et à la licence physique. Manipulations chimiques, Analyse qualitative, Notions d'analyse quantitative par liqueurs titrées. Jn—16⁰, II+251 p. avec fig. Paris. Hachette et C-e. fr. 2,50.

Lugol, P. Cours élémentaire de chimie, à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire classique et des candidats au baccalauréat (dernier programme officiel). Jn—18 jésus, VIII+491 p. Paris.

Maumène, E. J. Comment s'obtient le bon vin. Manuel du vinifacteur. Jn—8⁰. 242 p. avec 51 fig. dans le texte. Paris. fr. 3.50.

Moureu, C. Contribution á l'étude de l'acide acrilique et de ses dérivés (thèse). Jn—8⁰, 73 p. Paris. Gauthier-Villars et fils.

Poulenc, C. Contribution á l'étude des fluorures anhydres et cristallisés (thèse). Jn—4⁰, 75 p. Paris. Gauthier-Villars et fils.

Adrian, L. A. Exposition internationale de Chicago. (1893). Compte rendu des groupes 87 et 88. Comité 19: Produits chimiques et pharmaceutiques, Materiel de la peinture, prafumerie. Jn—8⁰. 75 p. Paris.

Blas. Chimie pharmaceutique minérale. 2-e partie. Métaux. 2-e édition. Louvain (Uystpruyst), 1892. Jn—8⁰, 600+VIII p. en autographie. fr. 17.

Gasselin, V. Action du fluorure de bore sur quelques composés organiques (thèse). Jn—8⁰, 84 pages. Paris. Gauthier-Villars et fils.

Ouvrard, L. Combinaisons des sulfures de phosphore, d'arsenic et d'antimoine avec les halogènes (thèse). Jn—4⁰, 42 p. Paris. Gauthier-Villars et fils.

Pigeon, L. Recherches chimiques et calorimétriqus sur quelques combinaisons haloïdes du platine (thèse). Jn—8⁰, 76 p. Paris. Gauthier-Villars et fils.

Billet, H. Chimie. Premières leçons (deuxième partie). Résumé pratique de la théorie atomique, avec tableaux comparatifs des deux systèmes de notations et de formules. Jn—8⁰, 13 pages. Boulogne-sur-Mer.

Cambier, T. Progrès à réaliser dans la fabrication du sucre par l'adoption d'un appareil automatique continu et enregistreur du dosage de la chaux dans le jus, à premièr carbonatation. Jn—8⁰, 23 p. Lille.

Doyen, E. La Fermentation et l'Emploi des levures dans la fabrication des vins et des hydromels. Jn—18⁰, 20 p. Commercy. fr. 0,20.

Durvelle, J. P. Fabrication des essences et des parfums. Plantes à parfum; Extraction des essences et des parfums par distillation, par expression et par les dissolvants. Jn—8 jésus, VII+449 p. avec 82 fig. Paris. Fritsch.

Fonzes, H. Recherches sur la solubilité de quelques sels halogènes dans une série de dissolvants neutres (thèse). Jn 8⁰, 39 p. et planches. Montpellier.

Seress, L. Traité de chimie, avec la notation atomique, à l'usage des élèves de l'enseignement primaire supérieur, de l'enseignement secondaire moderne et classique, des candidats aux écoles du gouvernement et des élèves de ces écoles. Première partie: Métalloïdes. Jn—8⁰, 330 p. avec gravures. Paris. Baudry et C-e. fr. 3,50.

Bécret, L. Contribution á l'étude de la chimie sucrière. Jnfluence des oxydes de fer et d'alumine en sucrerie. Jn—8⁰,9 p. Mayenne Poirier-Bealu.

De-Koninck. Traité de chimie analytique minérale, qualitative et quantitative. Ouvrage rédigé d'après le programme des cours professés par l'auteur à la faculté des sciences, à l'Jnstitut pharmaceutique et à la faculté technique de l'Université de Liége. T. I, avec 163 figures dans le texte et une planche en couleur. Liége, 1894. Jn—8⁰, XXXI+480 p. L'ouvrage complet en 2 volumes. fr. 25,00.

Математика.

Lerch, M. Sur une fonction transcendante. gr. 8⁰. 7 p. Prag. F. Řivnáč. M. 0,20.

— Sur un point concernant la théorie de la fonction gamma. gr. 8⁰, 8 p. Ebd. M. 0,20.

— Géneralisation du theorème de Frullani gr. 8⁰. 6 p. Ebd. M. 0,20.

Le Vavasseur, R. Sur le sistème d'équations aux dérivées patielles simultanées auxquelles satisfait la série hypergéométrique à deux variables $F(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ (thèse). Jn—4⁰, 221 p. avec fig. Paris. Gauthiers-Villars et fils.

Pélissier, J. M. Leçons nouvelles d'algèbre théorique et pratique, d'après les programmes de 1891 pour les classes de lettres et pour la première partie du baccalauréat de l'enseignement secondaire classique. Jn—16⁰, 185 p. Paris. Vic et Amat.

Bertrand, J. et *H. Garcet.* Traité d'algèbre. Deuxième partie, à l'usage des classes de mathématiques spéciales. Nouvelle édition. Jn—8⁰, 392 p. Paris. Hachette et C-e. fr. 5,00.

De Koninckx. Géométrie. Problèmes avec solutions. Anvers. Jn—16⁰, 108 p., fig. et 3 planches hors texte. fr. 1,75.

Tables de logarithmes à cinq décimales pour les nombres de 1 à 10,000 et pour les fonctions trigonometriques de minute en minute; par les Frères des écoles chrétiennes. Edition stérétype. Jn—18 jésus, VIII+148 p. Paris. Poussielgue.